UNIVERSITE PAUL SABATIER

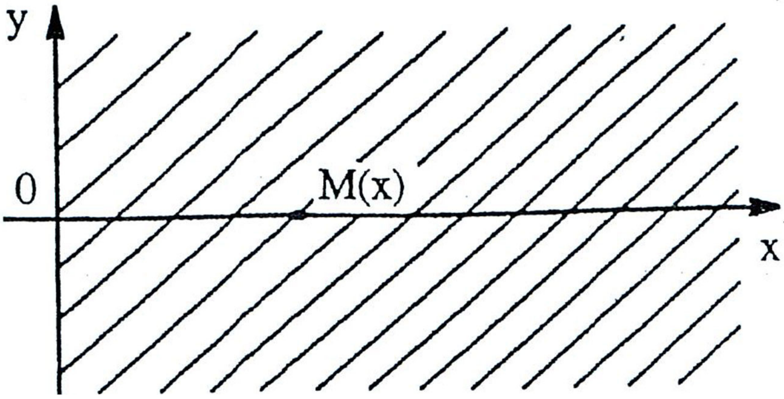
TOULOUSE III

L3 Parcours Physique et Application à l'Energie
EL5PPAB1

Année 2011/2012

TD 7 – TRANSFORMATIONS DE LAPLACE - SUITE

On considère un solide semi-infini $x \geq 0$, supposé indéfini dans la direction des y (voir figure).



A l'intérieur du solide ($x > 0$), la température en un point M(x) à l'instant t, $U(x, t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles : $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \dfrac{1}{k}\dfrac{\partial U}{\partial t} = 0$ avec k une constante. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, la température à l'intérieur du solide est nulle, soit $U(x, 0) = 0$ pour $x > 0$, et qu'en outre la fonction $U(x, t)$ satisfait aux conditions aux limites $U(0, t) = F(t)$, avec $F(t)$ une fonction continue, et $\lim_{x \to \infty} U(x, t) = 0$ pour $t > 0$.

1. En désignant par $u(x, p)$ la transformée de Laplace de $U(x, t)$ par rapport à t et par $f(p)$ la transformée de Laplace de $F(t)$, déterminer l'équation différentielle à laquelle doit satisfaire $u(x, p)$ ainsi que les conditions aux limites $u(0, p)$ et $u(\infty, p)$.
   En déduire $u(x, p)$.

2. On considère le flux de chaleur à travers le plan $x = 0$ défini par $\Phi(t) = -K\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=0}$,
   où K est une constante. Déterminer la transformée de Laplace $\varphi(p)$ de $\Phi(t)$. En déduire l'original $\Phi(t)$ de $\varphi(p)$. Pour cela, on tiendra compte du fait que $\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} \supset \dfrac{1}{\sqrt{p}}$ et qu'une expression de la forme $\sqrt{p}\, f(p)$ peut s'écrire $\sqrt{p}\, f(p) = \dfrac{F(0)}{\sqrt{p}} + \left[pf(p) - F(0)\right]\dfrac{1}{\sqrt{p}}$.
   Exprimer de flux $\Phi(t)$ lorsque $F(t) = F_0$ = constante.

3. Soit $Q(t)$ la quantité de chaleur absorbée au temps t par le solide à travers l'unité de surface du plan $x = 0$ et définie par $Q(t) = \int_0^t \Phi(t)dt$. Déterminer la transformée de Laplace $q(p)$ de $Q(t)$. En déduire $Q(t)$.
   Le déterminer dans le cas où : $\begin{cases} F(t) = F_0 = Cte & 0 < t < t_0 \\ F(t) = 0 & t > t_0 \end{cases}$.